2/каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0),\mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $M(L_0)$, когда тензор $\mathcal{X}^\alpha_n$ ($\mathcal{Y}^\alpha_n$; $\mathcal{Z}^\alpha_n$) равен нулю;

3/каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0),\mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $\chi(L_0)$ ([8, §4]), когда тензор $\check{\mathcal{X}}^p_n$ ($\check{\mathcal{Y}}^p_n$; $\check{\mathcal{Z}}^p_n$) равен нулю.

Список литературы

1.Балазюк Т.Н.Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов,оснащенных конусом .II. ВИНИТИ АН СССР,М.,1978,23с.,библиогр.6 назв.(Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 января 1978г., № 258-78 Деп.)

2.Домбровский Р.Ф.О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,z}$,в P_n .Всесоюзн.конф.по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского".Казань, Тезисы докл.,1976,с.69.

3.Лаптев Г.Ф.,Н.М.Остиану.Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I. - Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР, т.3,с.49-94.

4.Норден А.П.,Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств.-Известия высших учебн.заведений.Математика,1972,№ 8(123); с.81-89.

5.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., Наука,1976.

6.Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1973,т.4,с.71-120.

7.Попов Ю.И. О голономности $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.15.Калининград,1984,с.71-78.

8.Попов Ю.И.Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I.Калининград,1984,93с.,библиограф.21 назв.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР 2 июля 1984г.,№ 4481-84 Деп.)

9.Чакмазян А.В. Двойственная нормализация.-Докл. АН Арм.ССР,1959,28,№ 4,с.151-157.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

А.Г.Р е з н и к о в

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ ГРУПП ЛИ

В работе [1] была выяснена связь между расслоениями трехмерной сферы S^3 со стандартной метрикой на геодезические окружности и сжимающими отображениями сферы S^2,также снабженной стандартной метрикой и расстоянием.Такой подход позволяет распространить указанную связь на случай расслоений групп. Пусть $H\subset G$ - компактные группы Ли,причем G связана, $M=G/H$ - соответствующее однородное пространство.Назовем подгруппу H обширной,если выполнены следующие условия:
1/нормализатор $N(H)$ подгруппы H совпадает с H;
2/действие H на проективизации факторпространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ транзитивное ($\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ -алгебры Ли групп G,H).

В силу компактности H пространство M можно снабдить G - инвариантной римановой метрикой,а сами группы G,H -би-инвариантными метриками. Легко видеть, что условие 2/ эквивалентно следующему:
2'/ группа G транзитивно действует на эквидистантных парах,т.е. если $\rho(x,y)=\rho(x_1,y_1)$,то существует $g\in G$ такой,что $gx=x_1$, $gy=y_1$ (ρ -риманово расстояние на M).В качестве примера обширной подгруппы $H\subset G$ можно поэтому взять вложения $SO(n)\subset SO(n+1)$ или $SU(n)\subset SU(n+1)$. Обширна и подгруппа $S^1\approx SO(2)\subset SU(2)\approx S^3$.
Мы получим полное описание расслоений группы G на вполне геодезические слои вида fHg ,где $f,g\in G$.
Прежде всего выясним,до какой степени элементы f,g определены множеством $F=fHg$. Пусть f' и g' -другие элементы,такие ,что $fHg=F=f'Hg'$. Имеем $f'^{-1}fHgg'^{-1}=H$;

пусть $f'^{-1} f = \alpha$, $g g'^{-1} = \beta$, так что $\alpha H \beta = H$. В частности, $\alpha\beta = h \in H$, откуда $\beta = \alpha^{-1} h$, и поэтому $\alpha H \alpha^{-1} = H$. Значит, в силу свойства 1/ элементы α, β лежат в H, так что $f \in f'H$, $g \in Hg'$.

Л е м м а I. Множество F вида fHg однозначно определяет два элемента $\bar{f} \in G/H$ и $\bar{g}^{-1} \in G/H$, где $\bar{d} = dH$. Очевидно, что и обратно, два элемента $\bar{f}, \bar{g} \in M = G/H$ определяют корректно многообразие $F = fHg^{-1}$. В дальнейшем такую пару $(\bar{f}, \bar{g}) \in M \times M$ будем называть ассоциированной с множеством F.

Л е м м а 2. Пусть $H \subset G$ -обширная группа, F_1, F_2 - два многообразия вида fHg, (x_1, y_1), (x_2, y_2) -ассоциированные с ними пары. Пересечение $F_1 \cap F_2$ непусто тогда и только тогда, когда $\rho(x_1 x_2) = \rho(y_1, y_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i = f_i H$, $y_i = g_i H$, $i = 1, 2$. Непустота $F_1 \cap F_2$ означает, что существуют такие $\alpha, \beta \in H$, что $f_1 \alpha g_1^{-1} = f_2 \beta g_2^{-1}$, или, иначе $\beta^{-1} f_2^{-1} f_1 \alpha = g_2^{-1} g_1$. С другой стороны, в силу G -инвариантности метрики и расстояния на M, $\rho(x_1 x_2) = \rho(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = \rho(\overline{f_2^{-1} f_1}, \bar{e})$; и аналогично $\rho(y_1, y_2) = \rho(\overline{g_2^{-1} g}, \bar{e})$. В силу условия 2/ равенство $\rho(x_1 x_2) = \rho(y_1 y_2)$ эквивалентно существованию такого элемента $\gamma \in G$, что $\gamma\bar{e} = \bar{e}$ и $\overline{\gamma f_2^{-1} f_1} = \overline{g_2^{-1} g_1}$, т.е. $\gamma \in H$ и существует такое $\delta \in H$, что $\gamma f_2^{-1} f_1 = g_2^{-1} g_1 \delta$. Лемма доказана.

Нам понадобится понятие сжимающего отображения, несколько отличное от обычного. Пусть N -компактное метрическое пространство с функцией расстояния ρ. Отображение $\psi: N \to N$ будем называть сжимающим, если $\rho(\psi x, \psi y) < \rho(x, y)$ для всех $x, y \in N$, $x \neq y$. Любое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.

Пусть теперь ξ -локально-тривиальное расслоение группы G на слои вида fHg, где H -обширная подгруппа. Рассмотрим подмножество $A \subset M \times M$, состоящее из пар, ассоциированных со слоями ξ. Через A^{-1} будем обозначать обратное отношение.

Т е о р е м а 1. Либо A, либо A^{-1} является графиком

сжимающего отображения из M в M. Обратно, если $\varphi: M \to M$ - сжимающее отображение, A -его график, то множество многообразий F, ассоциированных с парами из A (или A^{-1}), определяет расслоение группы G на вполне геодезические слои вида fHg.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B -база расслоения ξ; очевидно, $\dim B = \dim M$. Отображение $\tau: B \to M \times M$, сопоставляющее точке $p \in B$ пару из $M \times M$, ассоциированную с соответствующим слоем ξ, очевидно, непрерывно. Очевидно, что $A = \operatorname{Im} \tau$. Пусть τ_1, τ_2 -суперпозиции τ с проекциями на первый и второй сомножители $M \times M$, p и q - две различные точки B. Слои над p и q не пересекаются, поэтому по лемме 2, $\rho(\tau_1 p, \tau_1 q) \neq \rho(\tau_2 p, \tau_2 q)$. Так как обе части последнего неравенства непрерывно зависят от p, q, а B связно вместе с G, то либо всегда $\rho(\tau_1 p; \tau_1 q) > \rho(\tau_2 p, \tau_2 q)$, либо наоборот. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично). Имеем $\rho(\tau_1 p, \tau_1 q) > 0$ т.е. τ_1 инъективно. Из теоремы об инвариантности области, совпадения размерностей B и M и компактности B и M следует, что τ_1 -гомеоморфизм. Значит $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ -корректно определенное сжимающее отображение.

Обратно, пусть $\varphi: M \to M$ -сжимающее отображение, $F(p)$ $(p \in M)$ -многообразие вида fHg, ассоциированное с парой $(p, \varphi(p))$. Мы хотим показать, что набор слоев $F(p)$ определяет расслоение G над M. Рассмотрим ситуацию локально, в некоторой окрестности O точки a. Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$ (общий случай сводится к этому при помощи суперпозиции со сдвигом). Пусть $s: O \to G$, $s(\bar{a}) = a$ -локальное сечение канонического расслоения $G \to M$, тогда, очевидно $F(p) = s(p) H s(\varphi(p))^{-1}$. Слои $F(p)$ не пересекаются в силу леммы 2. Рассмотрим отображение $\varkappa: O \times H \to G$, $\varkappa(p, h) = s(p) h s(\varphi(p))^{-1}$. Оно, следовательно, инъективно и, как выше, является локальным гомеоморфизмом из-за совпадений размерностей. Пусть $N = \bigcup F(p)$. Мы видим, что N открыто в G и расслоено над M со слоем, гомеоморфным H. Следовательно, N

компактно, т.е. $N=G$. Теорема доказана.

Замечательно, что существует конструкция, позволяющая по сжимающему отображению однородного пространства $M=G/H$ строить расслоения G на слои вида fHg без предположения обширности и даже компактности и связности G и H. А именно, пусть M снабжено инвариантной метрикой (автоматически полной), $\varphi: M\to M$ сжимающее отображение (если M некомпактно, то потребуем, как обычно, липшицевости с константой, меньшей единицы). Рассмотрим следующее отображение $\chi: G\to M$, $\chi(g)$ суть единственная неподвижная точка суперпозиции $\pi(g)\circ\varphi$, где $\pi(g): M\to M$ -действие g. Легко проверяется, что оно непрерывно. Изучим его слои. Пусть $p_0=f_0H\in M$, $\chi(d_0)=p_0$, т.е. $d_0\varphi(p_0)=p_0$. Если d лежит в том же слое, что и d_0, то имеем $d\varphi(p_0)=p_0$, или $dd_0^{-1}p_0=p_0$, т.е. $dd_0^{-1}f_0H=f_0H$, значит, для некоторого $h\in H$, $dd_0^{-1}f_0=f_0h$, откуда $d=f_0hf_0^{-1}d_0$. Ясно, что и обратно, если $d\in f_0Hf_0^{-1}d_0$, то $\chi(d)=p_0$. Итак, слои имеют вид fHg. Более того, элементы f и g могут быть выбраны непрерывно зависящими от p_0, поэтому χ - локально-тривиальное расслоение.

Отметим аналог нашей конструкции для конечных групп. Пусть M -конечное метрическое пространство с расстоянием ρ, инвариантным относительно транзитивно действующей на эквидистантных парах группы G, H - группа изотропии. Тогда разбиения G на слои вида fHg также отвечают графикам таких отношений A, которые "вполне неизометричны" в том смысле, что если $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$, то $\rho(x_1,x_2)\neq\rho(y_1,y_2)$. Любое множество вида fHg состоит из поворота и отражения. Следовательно, имеется ровно $n!$ "вполне неизометричных" отношений.

Список литературы

1. Gluck H., Warner F.W. Great circle fibrations of the three-sphere.- Duke Math. J. 1983, Vol.50, No.1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Г.Л.Свешникова

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции K^3 кривых второго порядка C [1], [2] с двумя трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Отнесем конгруэнцию K^3 к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$. Вершины A_1 и A_2 репера R совместим с трехкратными фокальными точками коники C, описывающими невырождающиеся поверхности, вершину A_3 поместим в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C, вершину A_4 - в произвольную точку пространства вне плоскости коники.

Уравнения коники C в этом репере, с учетом соответствующей нормировки вершин, примут вид

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0. \tag{1}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_i^4,\ \omega_3^i,\ \omega_3^4,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3\quad (i,j,\kappa=1,2;\ i\neq j)$$

являются главными формами конгруэнции K^3. Будем считать линейно независимые формы $\omega_i^4\overset{\text{def}}{=}\omega_i$ базисными формами конгруэнции K^3.

Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i, B_i -точка